

EXERCICE 4 3 points

Vérifions d'abord la condition 1 portant sur la première phase.

Nous avons :

- une expérience à deux issues (le candidat est qualifié), le succès est « être qualifié », a une probabilité $p = 0,6$;
- cette expérience est répétée quatre fois (quatre candidats) de façon identique et indépendante, donc $n = 4$ répétitions;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,6$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,6)$.

La condition 1 « la deuxième phase doit avoir lieu dans 80% des cas » correspond à l'évènement « au moins deux candidats sont sélectionnés » a une probabilité supérieure ou égale à 0,8 (c'est à dire correspond à $P(X \geq 2) \geq 0,8$).

Avec la calculatrice : $P(X \geq 2) \approx 0,821$.

On a donc bien : $P(X \geq 2) \geq 0,8$, la condition 1 est donc vérifiée.

Pour la condition 2 :

Soit T la variable aléatoire donnant la durée de la deuxième phase.

Les valeurs prises par T sont : 0, 5, 9 et 11.

La deuxième phase dure 11 minutes lorsque quatre candidats sont sélectionnés donc

$$P(T = 11) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^0 = 0,6^4 = 0,1296.$$

De même :

$$P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4^1 = 0,3456.$$

$$P(T = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,3456.$$

$$P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^4 + \binom{4}{1} \times 0,6^1 \times 0,4^3 = 0,0256 + 0,1536 = 0,1792$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de la loi T :

t_i	0	5	9	11
$P(T = t_i)$	0,1792	0,3456	0,3456	0,1296

La durée moyenne du jeu correspond à l'espérance de la variable aléatoire T .

$$E(T) = 0 \times P(T = 0) + 5 \times P(T = 5) + 9 \times P(T = 9) + 11 \times P(T = 11)$$

$$E(T) = 0 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 6,264$$

La durée moyenne du jeu est donc supérieur à 6 minutes, la deuxième condition n'est pas vérifiée, le jeu ne peut donc pas être retenu.