

EXERCICE 4

5 points

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1}$.
La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

- a. $+\infty$ b. 0,05 c. $-\infty$ d. 0

$$\left\| \begin{array}{l} f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1} = 0,05 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} \\ \text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0. \\ \text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,05. \end{array} \right.$$

Réponse b.

2. On considère une fonction h continue sur $[-2; 4]$ telle que : $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$, $h(3) = -1$.

On peut affirmer que :

- a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1; 1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1; 1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1; 3]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 4]$.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{C'est l'application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle} \\ [1; 3]. \end{array} \right.$$

Réponse c.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } (v_n) \text{ converge vers } 0.$$

On peut affirmer que :

- a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge. b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
c. la suite (u_n) est croissante. d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Limite du quotient de deux suites.} \end{array} \right.$$

Réponse b.

4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.

Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12 €;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 €;
- sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

- a. gagne 3,50 € b. perd 3 €.
c. perd 1,50 € d. perd 0,50 €.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain (mise moins ce que l'on gagne); on cherche l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

tirage	nombre 1	nombre pair	autre
gain	$12 - 4 = 8$	$3 - 4 = -1$	$0 - 4 = -4$
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$E(X) = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{3}{6} + (-4) \times \frac{2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ ce qui correspond à une perte de 0,50 €. **Réponse d.**

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$.

On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a. $p = \frac{1}{5}$

b. $P(X = 1) = \frac{124}{125}$

c. $p = \frac{4}{5}$

d. $P(X = 1) = \frac{4}{5}$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \times p^0 \times (1 - p)^{3-0} = (1 - p)^3$$

$$\text{On a donc } (1 - p)^3 = \frac{1}{125} \iff (1 - p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \iff 1 - p = \frac{1}{5}; \text{ donc } p = \frac{4}{5}.$$

Réponse c.