EXERCICE 4   5 points

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Calculons u_1 : $\quad u_1 = \dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{11}{u_0}\right) = \dfrac{1}{2}\left(5 + \dfrac{11}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{25+11}{5} = \dfrac{18}{5}$.

$$u_2 = \dfrac{1}{2}\left(u_1 + \dfrac{11}{u_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{18}{5} + \dfrac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{18}{5} + \dfrac{55}{18}\right) = \dfrac{599}{180}.$$

2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition (c'est une fraction rationnelle).

   Pour tout réel strictement positif, on a :

   $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + 11 \times \dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2-11}{x^2} = \dfrac{x^2-11}{2x^2}$

   Pour tout x dans l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$, on a :

   $$\begin{aligned} x \geqslant \sqrt{11} &\implies x^2 \geqslant 11 && \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\implies x^2 - 11 \geqslant 0 \\ &\implies \dfrac{x^2-11}{2x^2} \geqslant 0 && \text{car, pour tout réel non nul, } 2x^2 > 0 \\ &\implies f'(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$, f' est à valeurs positives, donc f est croissante.

3. *Remarque :* on constate que la fonction f est telle que, pour tout entier naturel n, on a :

   $u_{n+1} = f(u_n)$, et par ailleurs, on va calculer $f\left(\sqrt{11}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \dfrac{11}{\sqrt{11}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \sqrt{11}\right) = \sqrt{11}$

   Pour tout entier naturel n, on s'intéresse à l'inégalité : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_n = 5$ et $u_{n+1} = u_1 = \dfrac{18}{5} = 3,6$ et par ailleurs, on a $\sqrt{11} \approx 3,32$ donc on a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{11}$. L'inégalité est vraie à l'indice 0.

   Hérédité : Pour un entier naturel n quelconque fixé, on suppose que l'inégalité est vraie pour l'indice n, c'est-à-dire que l'on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

   $$\begin{aligned} u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11} &\implies f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f\left(\sqrt{11}\right) && \text{car } f \text{ est croissante sur } \left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[\\ &\implies u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{11} && \text{grâce aux éléments de la remarque} \end{aligned}$$

   Conclusion : On a montré que l'inégalité est vraie pour l'indice 0, et que, pour tout entier naturel n la véracité est héréditaire de l'indice n à l'indice $(n+1)$. En vertu du principe de récurrence, on peut en déduire que :

   Pour tout n naturel, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

4. On a notamment :

   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{11}$: la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est décroissante.

   D'après le théorème de convergence monotone, la suite est donc convergente vers une limite a, telle que $a \geqslant \sqrt{11}$.

5. u est une suite convergente vers une limite réelle a et u a une relation de récurrence de la forme :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, ensemble qui contient tous les termes de la suite (car celle-ci est minorée par $\sqrt{11} > 0$).

D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite a de la suite doit être une solution de l'équation $f(x) = x$.

Résolvons cette équation dans $\mathbb{R}^{*+}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right) = x \\ &\iff x + \frac{11}{x} = 2x \\ &\iff -x + \frac{11}{x} = 0 \\ &\iff -x^2 + 11 = 0 \qquad \text{car sur } \mathbb{R}^{*+}, \quad x > 0 \\ &\iff x^2 = 11 \\ &\iff x = \sqrt{11} \qquad \text{car on résout sur } \mathbb{R}^{*+} \end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est $\sqrt{11}$

On en conclut donc que la suite ne peut converger que vers $\sqrt{11}$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{11}$.

Partie B - Application géométrique

1. **a.** Le rectangle R_0 a pour aire 11 et pour longueur $L_0 = 5$, donc sa largeur ℓ_0 est telle que $L_0 \times \ell_0 = 11 \iff \ell_0 = \dfrac{11}{L_0}$

   On a donc bien $\ell_0 = \dfrac{11}{5} = 2,2$.

   b. De façon général, pour tout n entier naturel :

   Le rectangle R_n a pour aire 11 et pour longueur L_n, donc sa largeur ℓ_n est telle que $L_n \times \ell_n = 11 \iff \ell_n = \dfrac{11}{L_n}$.

2. On sait que pour tout n naturel : $L_{n+1} = \dfrac{L_n + \ell_n}{2} = \dfrac{1}{2}(L_n + \ell_n) = \dfrac{1}{2}\left(L_n + \dfrac{11}{L_n}\right)$.

   La relation de récurrence vérifiée par la suite (L_n) est donc la même que celle vérifiée par la suite (u_n) dans la **partie A**. Comme de plus $L_0 = u_0 = 5$, les deux suites sont donc rigoureusement égales.

3. À la **partie A**, question **3.**, on a établi que la suite (u_n), donc la suite (L_n) est minorée par $\sqrt{11}$.

   On a donc $\sqrt{11} \leqslant L_n$. De plus :

$$\begin{aligned} \sqrt{11} \leqslant L_n &\implies \frac{1}{\sqrt{11}} \geqslant \frac{1}{L_n} \qquad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\implies \frac{11}{\sqrt{11}} \geqslant \frac{11}{L_n} \qquad \text{car } 11 > 0 \\ &\implies \sqrt{11} \geqslant \ell_n \end{aligned}$$

   En prenant cette inégalité et celle dont on est parti, on a bien : $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.

Géométriquement, cela veut dire que notre rectangle R_n a des dimensions qui tendent vers $\sqrt{11}$, donc le rectangle tend vers un carré de côté $\sqrt{11}$.

item Ce script renvoie un encadrement de $\sqrt{11}$ par les valeurs ℓ_n et L_n, arrondies au millionième près, où n est l'argument d'appel de la fonction.

a. Pour l'appel `heron(3)` le retour de la fonction sera donc ℓ_3 et L_3, arrondis au millionième près.

on obtient donc les valeurs suivantes : 3,316 606 , 3,316 643

b. Une interprétation de ces deux valeurs, c'est donc que le nombre $\sqrt{11}$ est compris entre 3,316 606 et 3,316 643, soit un encadrement d'un amplitude inférieure à 4×10^{-5}, soit une précision importante, avec seulement trois itérations de notre algorithme.

Remarque : Ici, la fonction python a été appelée `heron` en référence à Héron d'Alexandrie (qui a vécu sans doute au cours du Ier siècle après JC.).
La méthode de Héron ou méthode babylonienne est une méthode efficace d'extraction de racine carrée, cest-à-dire de résolution de l'équation $x^2 = a$, avec a positif. Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie, qui l'expose dans le tome I de son ouvrage Metrica (Les métriques), découvert seulement en 1896 mais certains calculs antérieurs, notamment égyptiens, semblent prouver que la méthode est plus ancienne. (source : wikipedia)