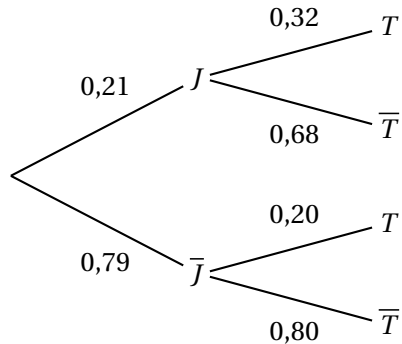


EXERCICE 1 4 points**Thème : probabilités****Partie A**

La situation peut se traduire par l'arbre pondéré suivant :



1. On calcule : $p(J \cap T) = p(J) \times p_J(T) = 0,21 \times 0,32 = 0,0672$.
2. On a de même $p(\bar{J} \cap T) = p(\bar{J}) \times p_{\bar{J}}(T) = 0,79 \times 0,20 = 0,158$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(T) = p(J \cap T) + p(\bar{J} \cap T) = 0,0672 + 0,158 = 0,2252.$$

3. Il faut trouver la probabilité conditionnelle :

$$p_T(J) = \frac{p(T \cap J)}{p(T)} = \frac{p(J \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0672}{0,2252} \approx 0,298, \text{ soit } 0,30 \text{ au centième près.}$$

Partie B

1. On suppose que la population de la ville est assez importante pour que la sélection de 120 personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise de 120 personnes chacune d'elles ayant une probabilité d'avoir moins de 35 ans de 0,30.

La loi de probabilité de X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(120 ; 0,30)$.

2. La calculatrice donne $p(X \geq 50) = 1 - p(X \leq 49) \approx 0,0044$.

EXERCICE 2 5 points

Thème : géométrie dans l'espace

1. a. L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle contient le point de coordonnées $(-3; 0; 5)$

et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de k donc $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- b. Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

- c. Une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels k et t tels que :

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2k - 3 \\ y = 3 - t = k \\ z = t = 5 \end{cases}$$

La dernière équation donne $t = 5$, puis la deuxième $k = 3 - 5 = -2$ et en remplaçant dans la première $2 + 5 = -4 - 3$: cette égalité est fausse, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

- d. Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

2. a. On a $\vec{w} \cdot \vec{u} = -1 - 2 + 3 = 0$;

de même $\vec{w} \cdot \vec{v} = -2 + 2 + 0 = 0$, donc le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- b. Un point commun au plan P et à la droite d_2 a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = k \\ z = 5 \\ 5x + 4y - z - 22 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ d'où en remplaçant } x, y, z \text{ dans la dernière équation :}$$

$$5(2k - 3) + 4(k) - 5 - 22 = 0 \iff 10k - 15 + 4k - 27 = 0 \iff 14k = 42 \iff 7k = 21 \iff k = 3.$$

Le point commun au plan P et à la droite d_2 a pour coordonnées $(6 - 3; 3; 5)$ soit $M(3; 3; 5)$.

3. a. Δ et d_1 ont leurs vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.

Ces deux droites sont sécantes s'il existent des réels t et r tels que

$$\begin{cases} x = 2 + t = -r + 3 \\ y = 3 - t = 2r + 3 \\ z = t = 3r + 5 \end{cases}, t, r \in \mathbb{R}.$$

La dernière équation $t = 3r + 5$ donne en remplaçant dans la deuxième :

$$3 - 3r - 5 = 2r + 3 \iff -5 = 5r \iff r = -1, \text{ d'où } t = 5 - 3 = 2 \text{ et en remplaçant dans la première équation on obtient } 2 + 2 = 1 + 3, \text{ égalité vraie.}$$

Δ et d_1 sont sécantes au point $L(4; 1; 2)$

- b. Conclusion : on a trouvé une droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites d_1 et d_2 .

EXERCICE 3 5 points**Thème : fonction exponentielle, algorithmique**

1. Affirmation : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = e^x - 1$, puis $f''(x) = e^x$.

On sait que $e^x > 0$ quel que soit x , donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. l'affirmation est vraie.

2. Affirmation : L'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.

Cette équation se traduit par :

$$\begin{cases} 2e^x - 6 = 0 & \text{ou} \\ e^x + 2 = 0 \end{cases}$$

• On sait (voir ci-dessus) que $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 2 > 2 > 0$. Donc la deuxième équation n'a pas de solution.

• $2e^x - 6 = 0 \iff 2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$, par croissance de la fonction logarithme népérien : c'est la seule solution donc l'affirmation est vraie.

3. Affirmation :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0.$$

$$\text{On a } \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \frac{(1 - e^{-2x})}{(1 - xe^{-x})}.$$

• Au numérateur on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$;

• Au dénominateur $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ et l'on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - xe^{-x} = 1$.

Le quotient a pour limite 1 et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$: l'affirmation est fausse.

4. La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x} = e^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x + 5)e^{3x} = f(x).$$

$$\text{D'autre part } F(0) = 1e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$$

F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$, l'affirmation est vraie.

5. L'exécution donne $\frac{1 + 9 + \dots + 5}{10} = \frac{50}{10} = 5$.

L'affirmation est fausse.

EXERCICE 4 6 points**Thème : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. a. Démonstration par récurrence :

Initialisation : On a bien $u_0 = 2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Alors par définition de la suite $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$ ou $u_{n+1} = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$.

La relation est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence :

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3, n \in \mathbb{N}.$$

b. On sait que $0 < 0,9 < 1$ implique que $0 < 0,9^n \leq 1$ puis en multipliant par $2 > 0$,

$0 < 2 \times 0,9^n \leq 2$ et enfin en ajoutant à chaque membre le nombre -3 :

$-3 < 0,9^n - 3 \leq -1$, soit $-3 < u_n \leq -1$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - 0,3 - u_n = -0,1u_n - 0,3$.

Or l'encadrement trouvé précédemment $-3 < u_n < -1$ donne par produit par $-0,1$,

$0,1 < -0,1u_n < 0,3$ et en retranchant $0,3$, $-0,2 < -0,1u_n - 0,3 < 0$.

Conclusion : quel que soit le naturel n , $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est donc décroissante.

d. La suite (u_n) décroissante et minorée par -3 converge vers une limite ℓ , avec $\ell \geq -3$.

D'autre part de l'égalité $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$, sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, on déduit que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$. La suite (u_n) converge vers -3 .

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $] -3 ; -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

a. Justifications :

- $-3 < x \leq -1 \Rightarrow -1,5 < 0,5x \leq -0,5 \Rightarrow 0 < 0,5x + 1,5 \leq 1$. Donc la fonction est définie sur $] -3 ; -1]$

- La fonction g est dérivable sur $] -3 ; -1]$ et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1 = \frac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x + 1,5} = \frac{-0,5x - 1}{0,5x + 1,5}.$$

On a vu ci-dessus que $0,5x + 1,5 > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-0,5x - 1$:

- $g'(x) = 0 \iff -0,5x - 1 = 0 \iff -1 = 0,5x \iff -2 = x$;
- $g'(x) > 0 \iff -0,5x - 1 > 0 \iff -1 > 0,5x \iff -2 > x$;
- $g'(x) < 0 \iff -0,5x - 1 < 0 \iff -1 < 0,5x \iff -2 < x$;

Conclusion : la fonction est croissante sur $] -3 ; -2]$ et décroissante sur $[-2 ; -1]$.

- On a $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(0,5x + 1,5) = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$

- $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = 0 + 1 = 1$;

- $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) - (-2) = 2 + \ln 0,5 = 2 + \ln \frac{1}{2} = 2 - \ln 2 \approx 1,31$.

- b.** D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $] -3 ; -2]$, la fonction g est strictement croissante de moins l'infini à $g(-2) > 0$ et est continue sur cet intervalle : il existe donc un réel unique

$\alpha \in] -3 ; -2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$g(-2,9) \approx -0,957$ et $g(-2,8) \approx 0,4974$, d'où $-2,9 < \alpha < -2,8$;

$g(-2,89) \approx -0,01$ et $g(-2,88) \approx 0,067$, d'où $-2,89 < \alpha < -2,88$;

$g(-2,889) \approx -0,002$ et $g(-2,888) \approx 0,006$, d'où $-2,889 < \alpha < -2,888$.

- 3. a.** Que que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$ et en utilisant la formule du **1. a.**, $v_n = \ln(0,5(2 \times 0,9^n - 3) + 1,5) = \ln(0,9^n - 1,5 + 1,5) = \ln 0,9^n = n \ln 0,9$.

L'égalité $v_n = n \ln 0,9$, montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 0,9$.

- b.** On a $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$.

- c.** On a donc $g(u_n) = 0 \iff u_n = \alpha$, soit $2 \times 0,9^n - 3 = \alpha$.

Or on a vu que $-2,889 < \alpha < -2,888$: on en déduit que $-2,889 < 2 \times 0,9^n - 3 < -2,888$, soit en ajoutant 3 :

$0,111 < 2 \times 0,9^n < 0,112 \iff 0,0555 < 0,9^n < 0,0556$ soit par croissance du logarithme népérien $\ln 0,0555 < n \ln 0,9 < \ln 0,0556$ et enfin $\frac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} < n < \frac{\ln 0,0555}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 < 0$).

Or $\frac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} \approx 27,4$ et $\frac{\ln 0,0555}{\ln 0,9} \approx 27,5$.

On aurait donc un entier n tel que $27,4 < n < 27,5$. Donc n ne peut être un naturel.

Conclusion : il n'existe pas k tel que $u_k = \alpha$.

- d.** On a vu que $u_n = \alpha \iff g(u_n) = 0 \iff u_n = v_n$. On vient de voir que ceci n'est pas possible : il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.