EXERCICE 3 **5 points**

1. **Conjectures graphiques :**

   Le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$:

   - pour $k = 1$, l'équation ne semble pas avoir de solution, car il semble que la droite d'équation $y = x$ ne coupe pas la courbe représentative de la fonction ln;
   - pour $k = 0,2$, l'équation semble avoir deux solutions, car la droite d'équation $y = 0,2x$ semble couper la courbe représentative de la fonction ln en deux endroits distincts.

2. Étude du cas $k = 1$:

   a. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel x strictement positif, on a :
   $f'(x) = \ln'(x) - 1 = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

   b. On va donc étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations, au sein d'un tableau. Comme les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues, on ne va pas les déterminer.
   Sur $\mathbb{R}^{*+}$, x est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x$.
   $1 - x > 0 \iff x < 1$. $\quad f(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.
   On a donc :

x	0		1		$+\infty$
$1-x$	||	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
variations de f	||	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

   c. On en déduit que sur son ensemble de définition, f atteint un maximum égal à -1 pour $x = 1$, donc f est à valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}^{*+}$.
   Il n'y a donc aucune solution à l'équation $f(x) = 0$, or $f(x) = 0 \iff \ln(x) = x$, donc l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

3. Étude du cas général :

   a. Discutons du nombre de solutions :

   - Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) < 0$, alors la fonction g a pour maximum un nombre réel strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.
   - Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) = 0$, alors l'équation admet clairement $\dfrac{1}{k}$ comme solution et cette solution est la seule, car : g étant strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{k}\right]$, $x < \dfrac{1}{k} \implies g(x) < g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et donc $g(x) < 0$.
     Et g étant strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$, $x > \dfrac{1}{k} \implies g(x) < g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et donc $g(x) < 0$.
     Ainsi, l'équation admet une unique solution dans ce cas.

- Si $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, alors :

  f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{k}\right]$, et 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x\to 0} g = -\infty$ et $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

  Puis, de façon analogue, on applique le même théorème sur $\left]\frac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$, où g est continue et strictement décroissante pour faire émerger une seconde solution β, la seule sur $\left]\frac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$.

  Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans ce cas.

b. On rappelle que k est un réel strictement positif, donc $\frac{1}{k}$ l'est aussi, et donc $\frac{1}{k}$ est dans l'ensemble de définition de g. On a $g\left(\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k \times \frac{1}{k} = -\ln(k) - 1$.

c. On a : $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff -\ln(k) - 1 > 0$.

$$\iff -\ln(k) > 1$$
$$\iff \ln(k) < -1$$

Nous parvenons bien à l'équivalence demandée.

d. On remarque que $g(x) = 0 \iff \ln(x) = kx$.

L'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions est donc constitué des nombres k vérifiant $\ln(k) < -1$, d'après la question précédente.

$\ln(k) < -1 \iff k < \mathrm{e}^{-1}$.

L'ensemble des valeurs k cherché est donc $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$

e. En synthèse des questions précédentes, on peut donc dire que l'équation $\ln(x) = kx$:

- admet exactement deux solutions pour $k \in \left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$;
- admet une unique solution pour $k = \mathrm{e}^{-1}$;
- n'admet aucune solution pour $k \in \left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$;

Remarque : Ce résultat confirme nos conjectures du début de problème, dans la mesure où $0,2 \in \left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$ et $1 \in \left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ (en effet $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,4$).