EXERCICE 3 6 points

1. **a.** Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les points suivants :
H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

   b. On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

2. Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

   B(2 ; 0 ; 0) C(2 ; 2 ; 0) F(2 ; 0 ; 2)

   Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz, son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

   Ici on a donc $x = 2$

   Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

   $$\begin{aligned} M_t \in \text{(BCF)} &\iff x_{M_t} = 2 \\ &\iff 3t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

   $x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

   Cela confirme $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

3. **a.** $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

   $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

   b. $PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

   c. On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

   On a donc $\frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

   d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \frac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

   L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{\mathrm{EN}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{N}-x_\mathrm{E} \\ y_\mathrm{N}-y_\mathrm{E} \\ z_\mathrm{N}-z_\mathrm{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_\mathrm{E} + t x_{\overrightarrow{\mathrm{EN}}} \\ y = y_\mathrm{E} + t y_{\overrightarrow{\mathrm{EN}}} \\ z = z_\mathrm{E} + t z_{\overrightarrow{\mathrm{EN}}} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\left\{\begin{array}{l} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 3t = 3t' \\ 2-2t = t' \\ 2-t = 2-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = t' \\ 2-2t = t \\ 2-t = 2-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{array}\right. \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P.