EXERCICE 3 **4 points**

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** $v_0 = 2\times 3\times 10^{21} = 6\times 10^{21}$noyaux atomiques.

   b. Si v_n est le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours, le lendemain 0,5 % ont disparu, il reste donc $v_n\left(1-\dfrac{0,5}{100}\right) = v_n\times(1-0,005) = 0,995v_n$ que l'on augmente de 0,005. Donc $v_{n+1} = 0,995v_n + 0,005\times 3\times 10^{21} = 0,995v_n + 0,015\times 10^{21}$ ou encore

$$v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5\times 10^{19}.$$

2. **a.** *Initialisation* :
   Pour $n = 0$, $u_0 = 6\times 10^{21}$;
   Pour $n = 1$, la relation de récurrence donne :
   $u_1 = 0,995\times 6\times 10^{21}v + 1,5\times 10^{19} = 5,97\times 10^{21} + 1,5\times 10^{19} = 597\times 10^{19} + 1,5\times 10^{19} = 598,5\times 10^{19} = 5,985\times 10^{21}$.
   On a donc $0 \leqslant v_1 \leqslant v_0$. la proposition est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. On peut écrire successivement :
   $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \iff 0,995\times 0 \leqslant 0,995v_{n+1} \leqslant 0995v_n \iff 0 + 1,5\times 10^{19} \leqslant v_{n+1}\times 0,995 + 1,5\times 10^{19} \leqslant 0,995v_n + 1,5\times 10^{19}$ soit $1,5\times 10^{19} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

   b. La partie gauche de la proposition montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et la partie de droite montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3\times 10^{21}.$$

   a. D'après la définition on a :
   $u_{n+1} = v_{n+1} - 3\times 10^{21} = 0,995v_n + 1,5\times 10^{19} - 3\times 10^{21} = 0,995v_n + 1,5\times 10^{19} - 300\times 10^{19}$, soit $u_{n+1} = 0,995v_n - 298,5\times 10^{19} = 0,995v_n - 2,985\times 10^{21} = 0,995v_n - 3\times 0,995\times 10^{21} = 0,995\left(v_n - 3\times 10^{21}\right) = 0,995u_n$.
   L'égalité $u_{n+} = 0,995u_n$, vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995, de premier terme $u_0 = v_0 - 3\times 10^{21} = 6\times 10^{21} - 3\times 10^{21} = 3\times 10^{21}$.

   b. On sait que le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_n = u_0\times 0,995^n = 3\times 10^{21}\times 0,995^n$.
   Or $u_n = v_n - 3\times 10^{21} \iff v_n = u_n + 3\times 10^{21} = 3\times 10^{21}\times 0,995^n + 3\times 10^{21} = 3\times 10^{21}\left(0,995^n + 1\right)$.

c. Comme $-1 < 0,995 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,995^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,995^n + 1 = 1$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3 \times 10^{21}$.

4. Il faut résoudre l'inéquation :

$v_n < 4,5 \times 10^{21} \iff 3 \times 10^{21}\left(0,995^n + 1\right) < 4,5 \times 10^{21} \iff 3\left(0,995^n + 1\right) < 4,5 \iff 0,995^n + 1 < 1,5 \iff 0,995^n < 0,5 \iff n \ln 0,995 < \ln 0,5 \iff n > \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,995}$ (car $\ln 0,995 < 0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,995} \approx 138,3$.

Le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$ au bout de 139 jours.

5. **a.** Pour définir V on peut utiliser la définition ou la formule explicite, soit

V = 0.995*V + 1.5*10**19 ou

V= 3*10**21*(0.995**(k+1)+1)

b. 52 semaines à 7 jours représentent 364 jours. Il faut donc écrire noyaux(364).