EXERCICE 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3\,;\,1\,;\,5),\qquad E(3\,;\,-2\,;\,-1),\qquad F(-1\,;\,2\,;\,1),\qquad G(3\,;\,2\,;\,-3)$$

1. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1-3\\2-(-2)\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{FG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

b. $-4\times(-1)=4$ et $4\times(-1)=-4\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas colinéaires ; on en déduit que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2. **a.** La droite (FG) passe par le point F et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&x_F+4t\\y&=&y_F+0t\\z&=&z_F+(-4)t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}\quad\text{soit}\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-1+4t\\y&=&2\\z&=&1-4t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

b. On appelle H le point de coordonnées (2 ; 2 ; −2).

H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) si H appartient à la droite (FG) et si les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

- Le point H appartient à la droite (FG) si on peut trouver une valeur de t telle que : $\left\{\begin{array}{rcl}x_H&=&-1+4t\\y_H&=&2\\z_H&=&1-4t\end{array}\right.$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcl}2&=&-1+4t\\2&=&2\\-2&=&1-4t\end{array}\right.$

  La valeur $t=\dfrac{3}{4}$ convient donc le point H appartient à la droite (FG).

- Le vecteur $\overrightarrow{EH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2-3\\2-(-2)\\-2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FG}=(-1)\times4+4\times0+(-1)\times(-4)=0$ donc $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{FG}$

Le point H est donc le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG).

c. D'après les questions précédentes, [EH] est la hauteur du triangle EFG correspondant à la base [FG] ; donc l'aire du triangle EFG vaut, en cm^2 :
$\mathscr{A}=\dfrac{EH\times FG}{2}$.

- $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ donc $EH=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

- $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $FG=\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Donc l'aire du triangle est en cm^2 : $\mathscr{A}=\dfrac{3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}}{2}=12$.

3. **a.** Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG) s'il est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$ et à $\overrightarrow{FG}$.

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EF} = 2\times(-4)+1\times4+2\times2 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{FG} = 2\times4+1\times0+2\times(-4) = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{FG}$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan (EFG).

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG), donc le plan (EFG) a une équation de la forme $2x+y+2z+d=0$ où d est un réel à déterminer.
F est un point de (EFG) donc $2x_F+y_F+2z_F+d=0$ c'est-à-dire
$2\times(-1)+2+2\times1+d=0$ ce qui donne $d=-2$.
Le plan (EFG) a donc pour équation $2x+y+2z-2=0$.

c. La droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) a pour vecteur directeur tout vecteur normal au plan (EFG) donc en particulier le vecteur $\overrightarrow{n}$. Elle a donc pour représentation paramétrique;

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_D+x_{\vec{n}}t\\ y &=& y_D+y_{\vec{n}}t\\ z &=& z_D+z_{\vec{n}}t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 5+2t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG). Le point K appartient donc à la droite (d) et au plan (EFG) donc ses coordonnées sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 5+2t\\ 2x+y+2z-2 &=& 0\end{array}\right.$

On a donc t tel que $2(3+2t)+(1+t)+2(5+2t)-2=0$, soit
$6+4t+1+t+10+4t-2=0$ ou encore $9t+15=0$; ce qui donne $t=-\dfrac{15}{9}=-\dfrac{5}{3}$.
On a donc : $x_K=3+2t=3+2\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$, $y_K=1+t=1+\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$ et
$z_K=5+2t=5+2\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

Donc le point K a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,,\,-\dfrac{2}{3}\,,\,\dfrac{5}{3}\right)$.

4. **a.** $DK^2=\left(-\dfrac{1}{3}-3\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}-5\right)^2=\left(-\dfrac{10}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{10}{3}\right)^2$

$$=\dfrac{100}{9}+\dfrac{25}{9}+\dfrac{100}{9}=\dfrac{225}{9}=25$$

Donc la distance DK est égale à 5 cm.

b. Le volume du tétraèdre DEFG est donné par la formule : $\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.
Une base du tétraèdre est le triangle EFG d'aire 12, et la hauteur relative à cette base est [DK] de longueur 5.
Le volume du tétraèdre DEFG est donc, en cm^3 : $\dfrac{12\times5}{3}=20$.