EXERCICE 1 4 points **Thème : probabilités**

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique.

Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate-forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

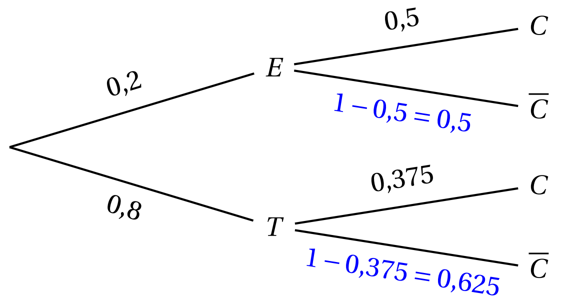
- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,5 ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,375.

On considère les évènements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique » ;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique » ;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

1. **a.** On résume les informations dans un arbre pondéré.



La probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique est :

$P(E \cap C) = P(E) \times P_E(C) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(E \cap C) + P(T \cap C) = 0,1 + 0,8 \times 0,375 = 0,4$.

c. On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique ; la probabilité qu'il souhaite acheter un véhicule à moteur électrique est :

$P_C(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$.

2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.

a. Les clients font des choix indépendants les uns des autres, donc on a une répétition de 17 épreuves indépendantes dont la probabilité de succès de chacune est $p = 0,2$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 17$ et $p = 0,2$.

b. La probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée est $P(X \geqslant 3)$.

$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0,3096$

Donc la probabilité cherchée est d'environ 0,69.

EXERCICE 2 6 points **Thème : fonctions**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = -\infty\\ \hfill\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + x$. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + x$ donc

$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = \left(-x + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + 1$, et donc

$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + \left(-x + \dfrac{1}{2}\right) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right) \mathrm{e}^{-x}$.

b. Le signe de f'' donne les variations de f'.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante ;
- Si $x > \dfrac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante ;
- Si $x = \dfrac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à
  $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

c. La fonction f' admet pour minimum

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}78 > 0$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

e. On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx -2{,}36 < 0 \\ f(0) = 0{,}5 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [-1\,;\,0]$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}3) \approx -0{,}03 < 0 \\ f(-0{,}2) \approx 0{,}17 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [-0{,}3\,;\,-0{,}2]$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}29) \approx -0{,}009 < 0 \\ f(-0{,}28) \approx 0{,}011 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [-0{,}29\,;\,-0{,}28]$

$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}286) \approx -0{,}001 < 0 \\ f(-0{,}285) \approx 0{,}0009 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [-0{,}286\,;\,-0{,}285]$

Donc $-0{,}285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

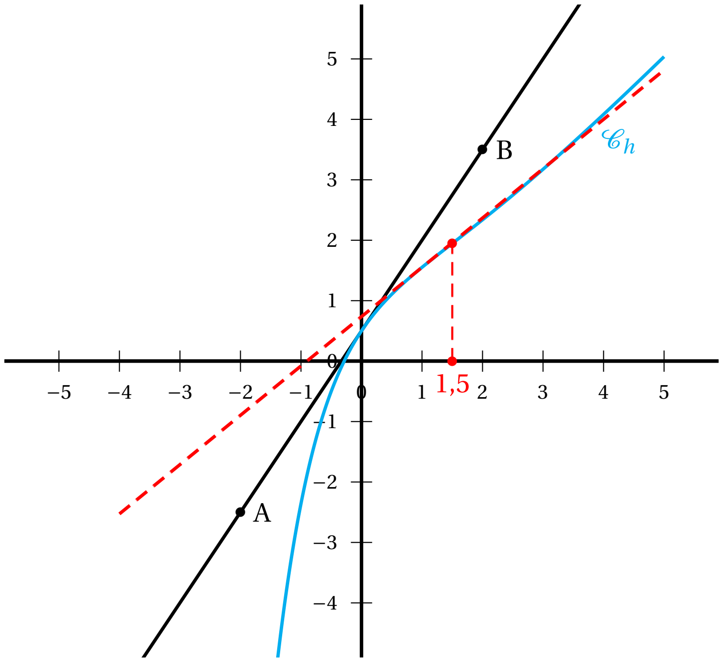
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2{,}5)$ et $(2\,;\,3{,}5)$.



1. Avec la précision permise par le graphique, on peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction h admet un unique point d'inflexion d'abscisse 1,5.
2. On admet que $h''(x) = -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$.

   $h''(x) = 0 \iff -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x - \dfrac{3}{2} = 0 \iff x = 1{,}5$

   La conjecture est donc vérifiée.
3. Déterminer une équation de la droite (AB) c'est chercher l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que : $\dfrac{y - y_\mathrm{A}}{x - x_\mathrm{A}} = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.

   $\dfrac{y - y_\mathrm{A}}{x - x_\mathrm{A}} = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} \iff \dfrac{y + 2{,}5}{x + 2} = \dfrac{3{,}5 + 2{,}5}{2 + 2} \iff \dfrac{y + 2{,}5}{x + 2} = \dfrac{6}{4} \iff y + 2{,}5 = \dfrac{6}{4}(x + 2)$

   $\iff y = \dfrac{3}{2}x + 3 - 2{,}5 \iff y = 1{,}5x + 0{,}5$

La droite (AB) a pour équation : $y = 1{,}5x + 0{,}5$.

4. La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, donc $h'(0) = 1{,}5$.

$h'(x) = a \times \text{e}^{-x} + (ax + b) \times (-1)\,\text{e}^{-x} + 1 = (-ax + a - b)\,\text{e}^{-x} + 1$

$h'(0) = 1{,}5 \iff (a - b)\,\text{e}^{0} + 1 = 1{,}5 \iff a - b = 0{,}5$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc $h(0) = 0{,}5$.

$h(0) = 0{,}5 \iff (0 + b)\,\text{e}^{0} + 0 = 0{,}5 \iff b = 0{,}5$

Comme $a - b = 0{,}5$, on en déduit que $a = 1$.

Donc $h(x) = (x + 0{,}5)\,\text{e}^{-x} + x = f(x)$.

EXERCICE 3 5 points **Thème : suites, algorithmique**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. $f'(x) = \frac{3}{2}x - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - \frac{4}{3}$ donc s'annule et change de signe pour $x = \frac{4}{3}$.

f est une fonction polynôme donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$.

De plus, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} - 2 \times \frac{4}{3} + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$.

On établit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$x - \frac{4}{3}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le résultat précédent la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.

On a donc : $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$.

Or $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$ et $f(2) = \frac{3}{4} \times 4 - 2 \times 2 + 3 = 3 - 4 + 3 = 2$.

Donc $\frac{5}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$ et *a fortiori* : $\frac{4}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$.

3. $f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \frac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right) = \frac{3}{4}(x-2)^2$

Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ donc $x \leqslant f(x)$.

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. On va démontrer par récurrence que la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**

  D'après la question précédente, pour $x \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$, on a $x \leqslant f(x)$.

  Or $u_0 \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$ donc $u_0 \leqslant f(u_0)$, ce qui revient à $u_0 \leqslant u_1$.

  De plus, si $x \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$, $f(x) \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.

  Or $u_0 \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$ donc $f(u_0) \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$ et donc $u_1 \in \left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$ et donc $u_{n+1} \leqslant 2$.

  Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$; la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

  On est dans l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ donc la fonction f est croissante; on en déduit : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.

  Or $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(2) = 2$.

  Donc on a : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$; la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 2$.

c. La suite (u_n) est définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ où f est une fonction polynôme donc continue.

La suite (u_n) est convergente vers ℓ donc la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff \dfrac{3}{4}(\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2.$

La suite (u_n) converge donc vers 2.

5. Étude du cas : $u_0 = 3$. On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

On complète la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while u < 100
      u = 3*u*u/4 - 2*u + 3
      n = n + 1
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

Pour tout réel x, on a : $x \leqslant f(x)$ donc, pour tout n, $u_n \leqslant f(u_n)$ soit $u_n \leqslant u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc croissante.

On en déduit que pour tout n, on a : $u_n \geqslant u_0$.

Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on aura donc : $\ell \geqslant u_0$.

On a vu que la seule limite possible de la suite (u_n) était $\ell = 2$; donc on ne peut pas avoir $\ell \geqslant u_0$ car $u_0 > 2$.

Pour $u_0 > 2$, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.

EXERCICE 4 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dans lequel on considère :

- les points A(6 ; −6 ; 6), B(−6 ; 0 ; 6) et C(−2 ; −2 ; 11).
- la droite (d) orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (BC) et passant par le point A;
- la droite (d') de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -6-8t \\ y &=& 4t \\ z &=& 6+5t \end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Question 1

Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur de la droite (d) ?

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\2\\0,2\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Il faut déterminer quel vecteur est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times (-12) + 2 \times 6 + 0 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 4 + 2 \times (-2) + 0 \times 5 = 0$ donc $\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{BC}$

Réponse b.

Question 2

Parmi les équations suivantes, laquelle est une représentation paramétrique de la droite (AB) ?

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+6 \\ y &=& -6 \\ z &=& t+6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t-6 \\ y &=& -6 \\ z &=& -t-6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+6 \\ y &=& -t-6 \\ z &=& 6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+6 \\ y &=& t-6 \\ z &=& 6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et parmi les quatre propositions, le seul vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est celui de coordonnées (2 ; −1 ; 0) correspondant à la réponse c.

Réponse c.

Question 3

Un vecteur directeur de la droite $\left(d'\right)$ est :

a. $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}-14\\4\\11\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}8\\4\\5\end{pmatrix}$

> Un vecteur directeur de la droite $\left(d'\right)$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-8\\4\\5\end{pmatrix}$ qui est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{v_3}$.
>
> **Réponse c.**

Question 4

Lequel des quatre points suivants appartient à la droite $\left(d'\right)$?

a. $M_1(50\,;\,-28\,;\,-29)$ **b.** $M_2(-14\,;\,-4\,;\,1)$

c. $M_3(2\,;\,-4\,;\,-1)$ **d.** $M_4(-3\,;\,0\,;\,3)$

> Il faut déterminer lequel des points M a des coordonnées qui vérifient le système
> $\left\{\begin{array}{rcl} x_M & = & -6-8t \\ y_M & = & 4t \\ z_M & = & 6+5t \end{array}\right.$
>
> Pour M_1 on a : $\left\{\begin{array}{rcl} 50 & = & -6-8t \\ -28 & = & 4t \\ -29 & = & 6+5t \end{array}\right.$ qui est vérifié pour $t = -7$.
>
> **Réponse a.**

Question 5

Le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal :

a. $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

> Le plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ donc le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
>
> **Réponse a.**