**Exercice 1** **5 points**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

On admet que $f$ est dérivable sur l'intervalle et on note $f'$ sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)]$, justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $\quad f'(x) = -4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$ et que $\alpha \in [1~;~\mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1 + x**2 - 2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p)
    a=1
    b=2.7
    while b - a > 10**(-p) :
    |   if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
    |   |  b = (a+b)/2
    |   else :
    |   |  a = (a+b)/2
    return (a,b)
```

Il écrit dans la console d'exécution :

`>>> dichotomie(1)`

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

| | |
|---|---|
| Proposition A : | (1.75, 1.9031250000000002) |
| Proposition B : | (1.85, 1.9031250000000002) |
| Proposition C : | (2.75, 2.9031250000000002) |
| Proposition D : | (2.85, 2.9031250000000002) |

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.
2. Démontrer que la fonction $g$ admet un maximum en $x = \alpha$

On admet que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note $T_1$ la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note $T_\alpha$ la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\alpha$.

   Déterminer, en fonction de $\alpha$, les coordonnées du point d'intersection des droites $T_1$ et $T_\alpha$.

**Exercice 2** **5 points**

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

   a. Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

   b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considère alors que ce pourcentage est négligeable.
On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.
On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.
On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,016.
Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise $n$ accouchements.

   On considère que ces $n$ accouchements sont indépendants les uns des autres.

   On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

   a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $X$ et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

   b. Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de $n$ telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

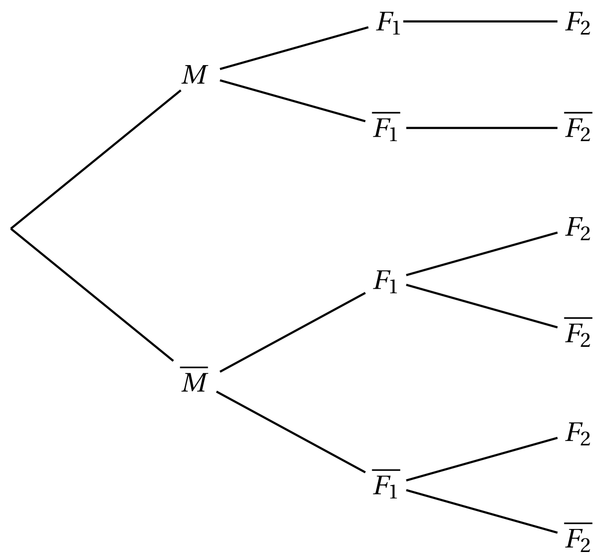
   Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.

   Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

   On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

   - $M$ : « les jumeaux sont monozygotes » ;
   - $F_1$ : « le premier nouveau-né est une fille » ;
   - $F_2$ : « le second nouveau-né est une fille ».

*On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement $A$ et $\overline{A}$ l'évènement contraire de $A$.*




**a.** Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessus.

**b.** Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,315 07.

**c.** Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

**EXERCICE 3** **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0\,;4\,;16),\quad B(0\,;\,4\,;\,-10),\quad C(4\,;\,-8\,;\,0)\quad \text{et}\quad K(0\,;4\,;3).$$

On définit la sphère $S$ de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que KM = 13.

1. **a.** Vérifier que le point C appartient à la sphère $S$
   **b.** Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   **b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On admet que la sphère $S$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.
   On note D celui qui a une abscisse positive.
   **a.** Montrer que le point D a pour coordonnées (12 ; 0 ; 0).
   **b.** Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
   **c.** Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.
   *On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre*

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h.$$

   *où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

**Exercice 4** **5 points**

**Partie A**

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = 2u_n(1-u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   Calculer $u_1$ puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel $n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite $(u_n)$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

**Partie B**

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note $P_n$ l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIXe siècle, on considère que, pour tout entier naturel $n$ :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel $b$ est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   - **a.** Justifier que la suite $(P_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   - **b.** Déterminer la limite de $P_n$.
2. Dans cette question $b = 0{,}2$.
   - **a.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.

     Calculer $v_0$ puis montrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 2v_n(1-v_n)$.
   - **b.** Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.