EXERCICE 2 6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x = \ln(2x+3) - 1 - x$.

1. $\lim_{x \rightarrow -1,5^+} 2x+3 = 0^+$ ($x > -1,5$ donc $2x+3 > 0$)
 or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -1,5} \ln(2x+3) = -\infty$.
 De plus, $\lim_{x \rightarrow -1,5} -1 - x = 0,5$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -1,5} g(x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $] -1,5 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.
 g est de la forme $\ln(u) + v$ avec $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = -1 - x$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$.
 $g' = \frac{u'}{u} + v'$ donc, pour tout réel $x \in] -1,5 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2}{2x+3} - 1 = \frac{2-2x-3}{2x+3} = \frac{-2x-1}{2x+3}$.
 Sur l'intervalle $] -1,5 ; +\infty[$, $2x+3$ est strictement positif donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-2x-1$: $g'(x)$ est donc strictement positif sur l'intervalle $] -1,5 ; -0,5[$ et strictement négatif sur l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$.

g est donc strictement croissante sur l'intervalle $] -1,5 ; -0,5[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$.

3. a. Sur l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$, la fonction g est une fonction continue (car dérivable) et strictement décroissante. D'où le tableau de variations :

x	$-1,5$	$-0,5$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$	$\approx 0,19$	$-\infty$

$g(-0,5) = \ln(2 \times (-0,5) + 3) - 1 + 0,5 = \ln(2) - 0,5 \approx 0,19$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (admis), donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(-0,5)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$.

- b. La calculatrice donne :

- $g(0,2) \approx 0,24$ et $g(0,3) \approx -0,02$ donc $0,2 < \alpha < 0,3$;
- $g(0,25) \approx 0,003$ et $g(0,26) \approx -0,002$ donc $0,25 \leq \alpha \leq 0,26$.

Partie B

1. f est croissante sur l'intervalle $] -1,5 ; +\infty[$ et donc en particulier sur l'intervalle $[-1 ; \alpha]$.

Donc $-1 \leq x \leq \alpha \implies f(-1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0 = f(\alpha) - \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(-1) = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(1) - 1 = -1$

donc $-1 \leq f(x) \leq \alpha$, c'est à dire $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.

2. a. *Initialisation* : à l'indice $n = 0$:

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0,099$ donc $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, l'inégalité $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ est vraie. Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [-1 ; \alpha]$$

$$\Rightarrow -1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha \quad \text{car } f(-1) = -1 \text{ et } f(\alpha) = \alpha$$

Si l'inégalité est vérifiée à l'indice n , alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion : L'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et sa véracité est héréditaire pour tout indice n naturel, donc, par principe de récurrence, on a $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ pour tout entier naturel n .

b. On vient d'établir que :

pour tout entier naturel n , $u_n \leq \alpha$ donc la suite est majorée par α

et pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite est croissante, elle est donc convergente.