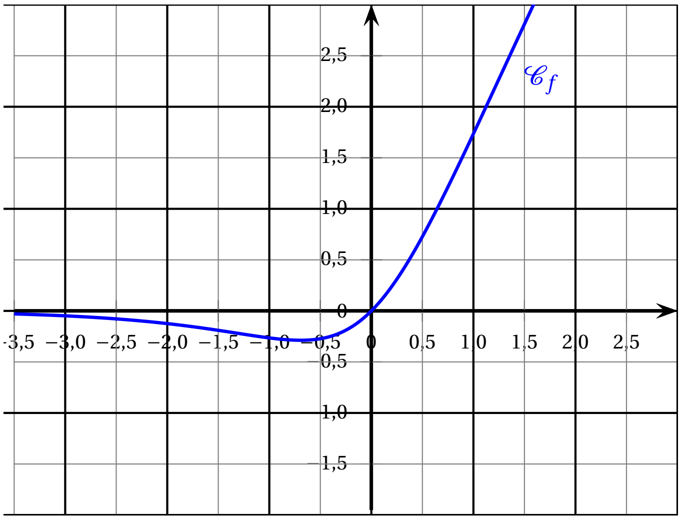
EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x = X = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$; d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

2. On peut écrire $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} - 1 + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et enfin par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

3. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et

   $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

4. D'après la question précédente comme $\mathrm{e}^{x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui de $2\mathrm{e}^{x} - 1$.

   - $2\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} = 1 \iff \mathrm{e}^{x} = \dfrac{1}{2} \iff x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ;
   - $2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} > 1 \iff \mathrm{e}^{x} > \dfrac{1}{2} \iff x > \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$;

- $2\mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff 2\mathrm{e}^x < 1 \iff \mathrm{e}^x < \dfrac{1}{2} \iff x < \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2.$

  La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$ et croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$.

  Donc $g(-\ln 2) = \mathrm{e}^{-2\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2} + 11 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

  D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le minimum de la fonction g est supérieur à zéro, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

6. En posant $X = \mathrm{e}^x$, $g(x) = g(X) = X^2 - X + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

Sous cette écriture on voit que $g(X)$ est un trinôme somme de deux carrés dont l'un est supérieur à zéro, donc $g(X) > 0$.

Partie B

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln g(x)$.

Or on a vu dans la partie précédente que $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \ln g(x)$ entraîne

$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1}$.

3. Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0 :

On a $M(x\,;\,y) \in \mathcal{T}_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

- $f(0) = \ln(1-1+1) = \ln 1 = 0$;
- $f'(0) = \dfrac{2-1}{1-1+1} = 1$, donc :

$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T}_0 \iff y - 0 = 1(x-0) \iff y = x$.

4. On a vu que $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ et dans la partie que le dénominateur $g(x) > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g'(x)$ étudié dans la partie A.

Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, d'où la fonction f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, d'où la fonction f est croissante sur cet intervalle.

5.
- $f(-\ln 2) = \ln g(-\ln 2) = \ln\dfrac{3}{4} \approx -0,29$;
- On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln g(x) = +\infty$.

La fonction f est continue car dérivable sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, strictement croissante de $f(-\ln 2) < 2$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique

$\alpha \in]-\ln 2\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(1) \approx 1,7$ et $f(2) \approx 3,8$, donc $1 < \alpha < 2$;

$f(1,1) \approx 1,9$ et $f(1,2) \approx 2,2$, donc $1,1 < \alpha < 1,2$;

$f(1,12) \approx 1,99$ et $f(1,13) \approx 2,01$, donc $1,12 < \alpha < 1,13$.

Partie C

Conjecture 1 : d'après le résultat précédent elle est vraie ;
Conjecture 2 : elle est fausse f est croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$;
Conjecture 3 : on a vu que l'équation de cette tangente est $y = x$: la conjecture est fausse.