EXERCICE 1 5 points

Pour ce QCM, aucune justification n'est demandée. On en fournit quand même dans ce corrigé.

1. **Réponse c.**

   Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+2^n}{3+5^n} = \dfrac{2^n \times \left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n \times \left(\frac{3}{5^n}+1\right)} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

   Or, les nombres : $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{5}$ étant tous strictement compris entre -1 et 1, on en déduit que les suites géométriques ayant ces nombres pour raison convergent vers 0.

   Par limite de somme et de quotient, on a alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$, puis, par limite du produit :

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 0$

2. **Réponse b.**

   f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

   $f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x\big(2\ln(x)+1\big)$.

3. **Réponse a.**

   La stricte croissance de h sur $\mathbb{R}$ et le fait que $h(1) = 0$ permettent de dire que :

   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 1 \implies h(x) < 0$.

   La fonction H étant une primitive de h sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à dire que h est la fonction dérivée de H, et donc H a une dérivée négative sur $]-\infty\ ;\ 1[$. H est donc décroissante sur cet intervalle.

   Cela implique donc que, pour tout x réel inférieur à 0, x et 0 seront dans $]-\infty\ ;\ 1[$ et donc :

   $x \leqslant 0 \implies H(x) \geqslant H(0)$, or, comme H s'annule en 0, cela signifie que $H(0) = 0$.

   Finalement, on a : $x \leqslant 0 \implies H(x) \geqslant 0$: H est bien à valeurs positives sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

4. **Réponse d.**

   On cherche la fonction qui met en œuvre l'algorithme de dichotomie.

   On peut tout de suite éliminer les propositions **b.** et **c.** : la valeur au centre de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ n'est calculée qu'une fois, et n'est pas réactualisée.

   De plus, pour la proposition **c.**, le test de la boucle "while" est incorrect : il provoque un arrêt quand l'amplitude de l'intervalle d'encadrement dépasse 0,001.

   Reste à trancher entre les propositions **a.** et **d.**, qui sont quasi identiques, à l'exception des actualisations des variables a et b.

   Reprenons la situation : f est continue, et strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$ et elle s'annule en un réel α. On a donc par croissance de f : $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

   m est la valeur au centre de l'intervalle $[a\ ;\ b]$, si on a $f(m) < 0$, alors cela veut dire que $f(a)$ et $f(m)$ sont strictement négatifs tous les deux, et donc c'est sur l'intervalle $[m\ ;\ b]$ que l'on peut appliquer le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, et donc le nombre α se trouve entre m et b, donc l'étape suivante de l'algorithme doit se faire entre m et b, donc on reprendra la même démarche, en gardant la valeur b dans la variable b, et en mettant la valeur m dans la variable a.

   C'est la proposition **d.** qui fait cela, et pas la proposition **a.**.

5. Réponse d.

Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une boule dans l'urne), le succès est « obtenir une boule verte », de probabilité $p = \dfrac{3}{10}$;
- cette expérience est répétée trois fois (trois tirages) de façon identique et indépendante (tirages avec remise), donc $n = 3$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{3}{10}$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3\ ;\ \dfrac{3}{10}\right)$.

L'évènement « obtenir deux boules vertes » correspond à $(X = 2)$ dans ce contexte, et par propriété, on a :

$P(X = 2) = \dbinom{3}{2} \times p^2 \times (1 - p)^{3-2} = \dbinom{3}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right) = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$.