EXERCICE 1 5 points

Pour ce QCM, aucune justification n'est demandée. On en fournit quand même dans ce corrigé.

1. **Réponse B.**

   F est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   F est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \text{e}^x$

   On a donc, pour tout réel x, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \text{e}^x$

   $F = u' \times v + v' \times u$ donc, pour tout réel x, $F'(x) = \text{e}^x + (x-1)\text{e}^x = x\text{e}^x = f(x)$.

   Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. **Réponse D.**

   Par lecture graphique : $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

   D'après l'énoncé : le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3\,;\,+\infty[$.

   D'après l'énoncé : le point d'abscisse 5 est le seul point d'inflexion, de plus, par lecture graphique, la fonction est concave puis convexe donc : $f''(x) < 0$ sur $]0\,;\,5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5\,;\,+\infty[$.

   Pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

3. **Réponse D.**

   Pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{a}{b + \text{e}^{-t}}$.

   D'une part $g(0) = \dfrac{a}{b + \text{e}^0} = \dfrac{a}{b+1} = 2$ donc $\dfrac{a}{b+1} = 2 \iff a = 2(b+1) = 2b + 2$.

   D'autre part :

   $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -t = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} \text{e}^X = 0$, donc, par composition, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \text{e}^{-t} = 0$

   d'où, par somme, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} b + \text{e}^{-t} = b$

   et donc, par quotient $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{a}{b + \text{e}^{-t}} = \frac{a}{b}$

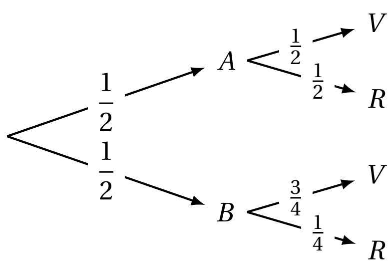
   d'où $\dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b$

   On a donc $a = 2b + 2 = 3b$ d'où $b = 2$ et $a = 3 \times 2 = 6$

4. **Réponse C.**

   Soient :

   - A l'évènement « Alice choisit l'urne A »
   - B l'évènement « Alice choisit l'urne B »
   - V l'évènement « Elle obtient une boule verte »
   - R l'évènement « Elle obtient une boule rouge »

   La situation peut être représentée à l'aide de l'arbre ci-contre :

   On cherche la probabilité $P_V(B)$.

   $P(\text{V} \cap B) = P(B) \times P_B(V) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$

   Les évènements A et B partitionnant l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$P(V) = P(V \cap A) + p(V \cap B) = P(A) \times P_A(V) + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

$P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{3}{5}$.

5. Réponse B.

On cherche l'algorithme qui permet de calculer la somme des 100 premiers termes de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

L'algorithme A. calcule chaque terme mais ils ne sont pas additionnés, ce n'est pas la réponse A.

L'algorithme C. initialise le compteur k, il ne peut donc pas comparer S à 100, l'algorithme ne fonctionne pas, ce n'est pas la réponse C.

L'algorithme D. initialise le compteur k à zéro mais il n'est pas incrémenté dans la boucle while, k faudra toujours 0 et l'algorithme ne s'arrête jamais, ce n'est donc pas l'algorithme D.

Par élimination, c'est donc l'algorithme B.