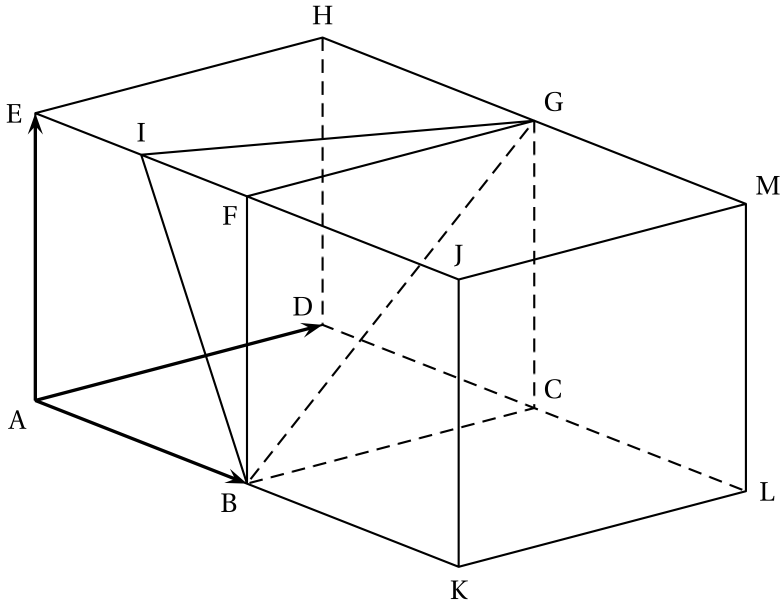
EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;\,0\,;\,1),\qquad G(1\,;\,1\,;\,1)\quad \text{et}\quad J(2\,;\,0\,;\,1).$$

1. Puisque ABCDEFGH et BKLCFJMG sont des cubes on a FG = BF = EH = AD = 1 et comme I est le milieu de [EF], on a $FI = \frac{1}{2} \times EF = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

En prenant comme base le triangle rectangle isocèle BFG et la hauteur [FI], on a donc :

$V_{\text{FIGB}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (unité de volume).

2. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$. les coordonnées de I sont donc : $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$.

3. Avec J(2 ; 0 ; 1) et D(0 ; 1 ; 0), on obtient $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.

De G(1 ; 1 ; 1) on obtient $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{\text{DJ}} \cdot \overrightarrow{\text{BI}} = -1+0+1 = 0$ et

$\overrightarrow{\text{DJ}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = 0-1+1 = 0$.

Conclusion $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal à deux vecteurs non colin"aires du plan (BIG) : c'est un vecteur normal à ce plan.

4. On sait donc d'après la question précédente que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(BIG)} \iff 2x-1y+1z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or $\text{B}(1\,;0\,;0) \in \text{(BIG)} \iff 2\times 1-1\times 0+1\times 0+d=0 \iff 2+d=0 \iff d=-2$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(BIG)} \iff 2x-1y+1z-2=0$

5. La droite d orthogonale à (BIG) a un vecteur directeur colinéaire à $\overrightarrow{\text{DJ}}$.

On a $\text{F}(1\,;0\,;1)$. D'autre part donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in d \iff$

$$\overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{\text{DJ}},\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 2t\\ y-0 &=& -t\\ z-1 &=& t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y-0 &=& -t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

6. **a.** Si $\text{L}'(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à d et au plan (BIG) ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de d et l'équation du plan (BIG) soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y-0 &=& -t\\ z &=& 1+\ t\\ 2x-y+z-2 &=& 0\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(1+2t)-(-t)+(1+t)-2=0 \iff 2+4t+t+1+t-2=0 \iff 6t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{6}$ et

en remplaçant dans x, y et z, on obtient $x=1+\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$, $y=-\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$ et $z=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

Conclusion avec $\text{L}'=d\cap\text{(BIG)}$, $\quad \text{L}'\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

b. Calculer la longueur FL. Avec $\overrightarrow{\text{FL}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

on a $\text{FL}'^2 = \left\|\overrightarrow{\text{FL}}\right\|^2 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{4}{36}+\dfrac{2}{36}=\dfrac{6}{36}$,

donc $\text{FL}'=\sqrt{\dfrac{6}{36}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

c. En prenant comme base le triangle (BIG) le tétraèdre FIGB a pour hauteur [FL′] ; on a donc

$$V_{\text{FIGB}} = \text{aire (BIG)} \times [\text{FL}'] \times \frac{1}{3} \iff \frac{\frac{1}{12}\times 3}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \text{aire (BIG)} = \frac{\sqrt{6}}{4}.\ \text{(unités d'aire)}$$