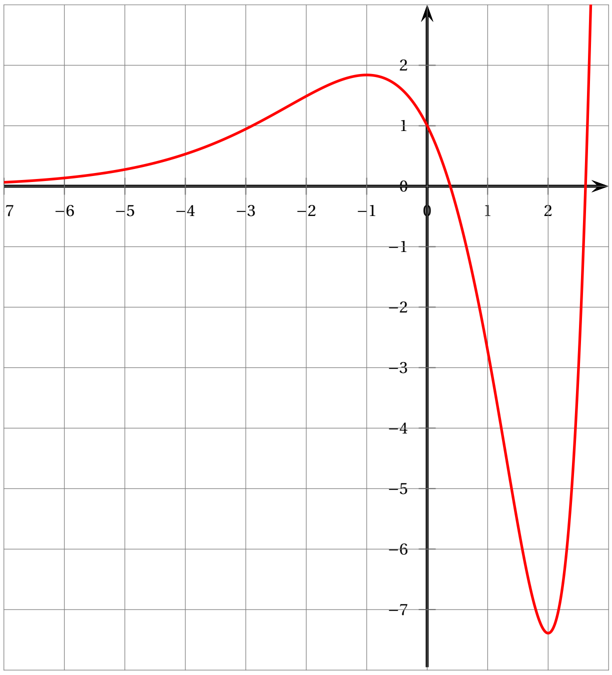
EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donné par le signe de la dérivée f'.
   - Sur $]-\infty\,;\,0{,}4[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
   - Sur $]0{,}4\,;\,2{,}6[$, $f' < 0$ donc f est strictement décroissante.
   - Sur $]2{,}6\,;\,+\infty[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la dérivée f' est croissante, soit sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)\mathrm{e}^x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. **a.** On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x = +\infty$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   b. On détermine la limite de la fonction f en $-\infty$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right) = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right) = 0$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = (2x-5)\,\mathrm{e}^x + \left(x^2-5x+6\right) \times \mathrm{e}^x = \left(2x-5+x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x = \left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x$

3. Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, on étudie le signe de $f'(x)$.
Pour tout x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 3x + 1$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$; $x' = \dfrac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		croissante		décroissante		croissante	

4. La tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
- $f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)e^x$ donc $f(0) = 6e^0 = 6$
- $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)e^x$ donc $f'(0) = 1e^0 = 1$

$\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y = 1(x - 0) + 6$ soit $y = x + 6$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$.

5. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

b. Sur $[-1 ; 2]$, la fonction f est concave donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente $\mathcal{T}$ car $0 \in [-1 ; 2]$.
Donc, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leqslant x + 6$.