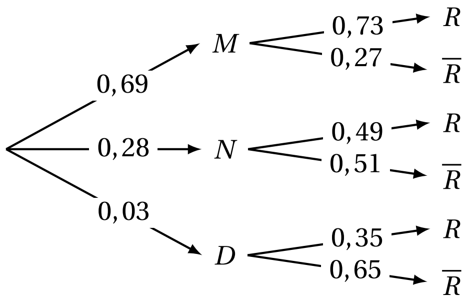
EXERCICE 1 5 points

Partie A

1. Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

   $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.

3. $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements M, N et D partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $P(R) = P(R\cap M)+P(R\cap N)+P(R\cap D) = 0,69\times 0,73+0,28\times 0,49+0,03\times 0,35 = 0,6514$

   On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité demandée est :

   $P_R(N) = \dfrac{P(R \cap N)}{P(R)} = \dfrac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \dfrac{686}{3257} \approx 0,2106$ au dix-millième près.

Partie B

1. **a.** On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Puisqu'elle compte le nombre de déchets recyclables, le succès est donc l'évènement R, de probabilité $p = 0,6514$, ceci dans un lot de 20 déchets, ce qui signifie qu'il y a eu $n = 20$ répétitions identiques et indépendantes.

   C'est donc la loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,6514)$ que suit X.

   b. On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

   $P(X = 14) = \dbinom{20}{14} p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \dbinom{20}{14} 0,6514^{14} \times 0,3486^6 \approx 0,1723$ au dix-millième près.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\ ;\ 0,6514)$

   a. On a $p_n = P(X_n = 0) = \dbinom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = 0,3486^n$.

   La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc de $p_n = 0,3486^n$

b. L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre :

$$\begin{aligned}1 - p_n \geqslant 0{,}9999 &\iff -p_n \geqslant -0{,}0001\\ &\iff p_n \leqslant 0{,}0001 \qquad \text{car } -1<0\\ &\iff 0{,}3486^n \leqslant 0{,}0001\\ &\iff n\ln(0{,}3486) \leqslant \ln(0{,}0001) \qquad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)} \qquad \text{car } 0{,}3486<1 \text{ donc } \ln(0{,}3486)<0\end{aligned}$$

Or, on a $\dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)} \approx 8,7$ et comme n est un entier, on en déduit que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.