EXERCICE 4**5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a .

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n , on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1.
 - a. Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.
 - b. Établir que pour tout entier naturel n ,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
1 def heron(n):
2     L=5
3     ℓ=2.2
4     for i in range(n):
5         L = (L+ℓ) / 2
6         ℓ = 11 / L
7     return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x, k)` renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

- a.** Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?
- b.** Donner une interprétation de ces deux valeurs.